

SÓNG RAYLEIGH TRUYỀN TRONG BÁN KHÔNG GIAN ĐÀN HỒI TRỰC HƯỚNG PHỦ BỞI MỘT LỚP MỎNG ĐÀN ĐIỆN

Nguyễn Thị Khánh Linh¹

Tóm tắt: Bài báo nghiên cứu sự lan truyền của sóng Rayleigh trong một bán không gian đàn hồi trực hướng được phủ một lớp mỏng. Liên kết giữa lớp và bán không gian là gắn chặt và giả thiết lớp là đàn điện và bán không gian đàn hồi trực hướng nén được. Mục đích chính của bài báo này là đưa ra các phương trình tán sắc dạng hiện của sóng Rayleigh truyền trong cấu trúc vật liệu như trên. Bằng cách áp dụng phương pháp điều kiện biên hiệu dụng, tác giả đã thu được phương trình tán sắc xấp xỉ bậc 3. Có thể thấy rằng, phương trình này ở dạng hoàn toàn tường minh, có độ chính xác cao và sẽ hữu ích trong các ứng dụng thực tế.

Từ khóa: Sóng Rayleigh, bán không gian đàn hồi nén được, lớp mỏng đàn điện, phương trình tán sắc.

1. GIỚI THIỆU

Sóng mặt Rayleigh truyền trong bán không gian đàn hồi đẳng hướng lần đầu tiên được Rayleigh tìm ra vào năm 1885 trong tài liệu tham khảo (Rayleigh, 1885), vẫn đang là đề tài thu hút một khối lượng lớn các nhà khoa học trên thế giới vì những ứng dụng quan trọng của nó trong nhiều lĩnh vực khác nhau của khoa học và công nghệ như địa chấn học, âm học, địa vật lý, công nghệ truyền thông và khoa học vật liệu. Có thể nói rằng những nghiên cứu của sóng mặt Rayleigh có ảnh hưởng sâu rộng đến cuộc sống hiện tại và có vị trí cao trong khoa học.

Ngày nay cấu trúc lớp mỏng đặt trên bán không gian đã và đang được sử dụng rộng rãi trong công nghệ hiện đại. Do vậy việc đánh giá không phá hủy các tính chất cơ học của chúng trước và trong quá trình sử dụng là quan trọng và có nhiều ý nghĩa. Để đánh giá không phá hủy các tính chất cơ học của lớp vật liệu và bán không gian, sóng mặt Rayleigh là công cụ thuận lợi (Adams and et. al., 2007). Khi đó, phương trình tán sắc của chúng được sử dụng như là cơ sở lý

thuyết để chất lọc ra các tính chất cơ học của cấu trúc từ dữ liệu đo được từ thực tế.

Cấu trúc lớp mỏng đặt trên bán không gian đối với các vật liệu đàn hồi đẳng hướng, trục hướng và các vật liệu có ứng suất trước đã có rất nhiều công trình nghiên cứu và đã thu được các phương trình tán sắc chính xác và phương trình tán sắc xấp xỉ (Vinh and et. al., 2013, 2014, 2016). Tuy nhiên đối với môi trường bán không gian trục hướng phủ lớp vật liệu đàn điện chưa có bất kỳ công bố nào.

Do vậy việc nghiên cứu sự truyền của sóng Raleigh trong bán không gian được phủ bởi một lớp vật liệu piezoelectric là cần thiết và quan trọng. Điều này đưa đến mục tiêu của báo cáo là tìm phương trình tán sắc dạng tường minh của sóng mặt Rayleigh truyền trong bán không gian trục hướng được phủ bởi một lớp đàn điện.

2. CÁC ĐIỀU KIỆN BIÊN HIỆU DỤNG XẤP XỈ BẬC BA ĐỐI CỦA LỚP ĐÀN ĐIỆN

2.1. Phương trình cơ bản

Xét một bán không gian đàn hồi $x_3 > 0$ được phủ bởi một lớp đàn hồi mỏng $-h \leq x_3 \leq 0$. Giả thiết, bán không gian là trục hướng, lớp là đàn điện, liên kết giữa lớp và bán không gian là gắn chặt. Chú ý các đại

¹ Bộ môn Cơ học kỹ thuật, khoa Cơ khí, Trường Đại học Thủy lợi

lượng đặc trưng cho bán không gian và lớp là ngang nếu các đại lượng đó thuộc về lớp. Ta cùng ký hiệu nhưng phân biệt bởi dấu gạch xét biến dạng phẳng có dạng:

$$u_i = u_i(x_1, x_3, t), \quad \bar{u}_i = \bar{u}_i(x_1, x_3, t), \quad i = 1, 3, \quad u_2 = \bar{u}_2 = 0. \quad (1.1)$$

ở đây t là thời gian. Giả sử vật liệu của lớp là vật liệu đàn điện. Mỗi quan hệ ứng suất-biến dạng và điện thế ϕ có dạng (Bernard Collet and et. al, 2005):

$$\bar{\sigma}_{11} = \bar{c}_{11}\bar{u}_{1,1} + \bar{c}_{13}\bar{u}_{3,3} + e_{31}\Phi_{,3}, \quad \bar{\sigma}_{33} = \bar{c}_{13}\bar{u}_{1,1} + \bar{c}_{33}\bar{u}_{3,3} + e_{32}\Phi_{,3}, \quad \bar{\sigma}_{13} = \bar{c}_{55}(\bar{u}_{1,3} + \bar{u}_{3,1}) + e_{15}\Phi_{,1} \quad (1.2)$$

trong đó $\bar{\sigma}_{ij}$ và $\bar{c}_{ij}$ tương ứng là ứng suất, áp suất thủy tĩnh và hệ số độ cứng không nén được của vật liệu, dấu phẩy chỉ đạo hàm theo biến không gian x_k .

Các phương trình chuyển động của đàn điện có dạng:

$$\bar{\sigma}_{11,1} + \bar{\sigma}_{13,3} = \bar{\rho}\ddot{u}_1, \quad \bar{\sigma}_{13,1} + \bar{\sigma}_{33,3} = \bar{\rho}\ddot{u}_3, \quad D_{1,1} + D_{3,3} = 0 \quad (1.3)$$

đây ρ là mật độ khối lượng, dấu chấm chỉ đạo hàm theo biến thời gian t .

$$\text{Từ (1.2)-(1.3), ta có: } \begin{bmatrix} \bar{U}' \\ \bar{\Sigma}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U} \\ \bar{\Sigma} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

ở đây $\bar{U} = [\bar{u}_1 \ \bar{u}_2 \ \Phi]^T$, $\bar{\Sigma} = [\bar{\sigma}_{13} \ \bar{\sigma}_{33} \ D_3]^T$ và "T" chỉ ma trận chuyển vị, dấu phẩy chỉ đạo hàm theo biến x_3 và

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\partial_1 & -s_6\partial_1 \\ -r_4\partial_1 & 0 & 0 \\ -r_2\partial_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} n_{66} & 0 & 0 \\ 0 & n_{22} & n_{24} \\ 0 & n_{24} & n_{44} \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} \rho\partial_1^2 - \eta\partial_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho\partial_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu\partial_1^2 \end{bmatrix}, M_4 = M_1^T \quad (1.5)$$

trong đó $\partial_1^2 = \partial^2 / \partial x_1^2$, $\partial_t^2 = \partial^2 / \partial t^2$, $\partial_1 = \partial / \partial x_1$

$$s_6 = \frac{e_{15}}{c_{55}}, r_2 = \frac{\bar{c}_{13}e_{33} - \bar{c}_{33}e_{31}}{\gamma}, r_4 = \frac{\bar{c}_{13}\partial_{33} + e_{31}e_{33}}{\gamma}, n_{66} = \frac{1}{\bar{c}_{55}}, n_{22} = \frac{\partial_{33}}{\gamma}, n_{44} = -\frac{\bar{c}_{33}}{\gamma},$$

$$\mu = -\partial_1 - \frac{e_{15}^2}{\bar{c}_{55}}, \quad \gamma = \partial_{33}\bar{c}_{33} + \bar{e}_{33}, \quad \eta = \bar{c}_{11} - \frac{\bar{c}_{13}(\bar{c}_{13}\partial_{33} + 2e_{31}e_{33}) - \bar{c}_{33}e_{31}^2}{\gamma}.$$

$$\text{Từ (1.4), ta có: } \begin{bmatrix} \bar{U}^{(n)} \\ \bar{\Sigma}^{(n)} \end{bmatrix} = M^n \begin{bmatrix} \bar{U} \\ \bar{\Sigma} \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix}, n = 1, 2, 3, \dots, x_2 \in [-h, 0]. \quad (1.6)$$

2.2. Điều kiện biên hiệu dụng xấp xỉ bậc ba

Với h là nhỏ (lớp mỏng), bằng cách khai triển Taylor $\Sigma(-h)$ tại $x_3 = 0$ lên đến bậc ba của h , $\Sigma(-h)$ có dạng:

$$\bar{\Sigma}(-h) = \bar{\Sigma}(0) - h\bar{\Sigma}'(0) + \frac{h^2}{2}\bar{\Sigma}''(0) - \frac{h^3}{6}\bar{\Sigma}'''(0) \quad (1.7)$$

Thay (1.4), (1.5) và (1.6) vào (1.7), lấy $\bar{U}(0) = [\bar{u}_1(0) \ \bar{u}_3(0) \ \Phi(0)]^T$, và $\bar{\Sigma}(0) = [\bar{\sigma}_{13}(0) \ \bar{\sigma}_{33}(0) \ 0]^T$, ta có:

$$\begin{aligned} & \bar{\sigma}_{13} + h(r_4\bar{\sigma}_{33,1} + \eta\bar{u}_{1,11} - \rho\ddot{u}_1) + \frac{h^2}{2}(a_2\Phi_{,111} - s_6\rho\ddot{\Phi}_{,1} + a_4\bar{\sigma}_{13,11} + n_{66}\rho\bar{\sigma}_{13} + \eta u_{3,111} - a_1\rho\ddot{u}_{3,1}) \\ & + \frac{h^3}{6}(a_{10}\bar{\sigma}_{33,111} + a_{11}\rho\ddot{\sigma}_{33,1} + a_{12}\bar{u}_{1,1111} - n_{66}\rho^2\ddot{u}_{1,t} + a_{13}\rho\ddot{u}_{1,11}) = 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} & \bar{\sigma}_{33} + h(\bar{\sigma}_{13,1} - \rho \ddot{u}_3) + \frac{h^2}{2}(r_4 \bar{\sigma}_{33,11} + n_{22} \rho \ddot{\sigma}_{33} + \eta \bar{u}_{1,111} - a_1 \rho \ddot{u}_{1,1}) \\ & + \frac{h^3}{6}(a_2 \Phi_{1,1111} + a_3 \rho \ddot{\Phi}_{1,1} + a_4 \bar{\sigma}_{13,111} + a_5 \rho \ddot{\sigma}_{13,1} + \eta \bar{u}_{3,1111} - a_6 \rho \ddot{u}_{3,11} - n_{22} \rho^2 \ddot{u}_{3,tt}) = 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} & h(\mu \Phi_{1,11} + s_6 \bar{\sigma}_{13,1}) + \frac{h^2}{2}(a_7 \bar{\sigma}_{33,11} + a_2 \bar{u}_{1,111} - s_6 \rho \ddot{u}_{1,1}) \\ & + \frac{h^3}{6}(a_8 \Phi_{1,1111} - s_6^2 \rho \ddot{\Phi}_{1,1} + a_9 \bar{\sigma}_{13,111} + n_{66} s_6 \rho \ddot{\sigma}_{13,1} + a_2 \bar{u}_{3,1111} + a_3 \ddot{u}_{3,11}) = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + r_4, a_2 = \mu r_2 + \eta s_6, a_3 = \mu n_{24} - s_6(1 + r_4), a_4 = r_4 + r_2 s_6 - \eta n_{66} \\ a_5 &= n_{22} + n_{66}(1 + r_4) + n_{24} s_6; a_6 = 1 + 2r_4; a_7 = r_4 s_6 - \mu n_{24} \\ a_8 &= 2\mu r_2 s_6 + \eta s_6^2 - \mu^2 n_{44}, a_9 = r_2 s_6^2 - \mu n_{44} s_6 - \mu n_{66} r_2 - \eta n_{66} s_6 - \mu n_{24} + r_4 s_6 \\ a_{10} &= r_4^2 - \eta n_{22} - \mu n_{22} - \mu n_{24} r_2 - \eta n_{66} r_4 - \eta n_{24} s_6 + r_2 r_4 s_6, a_{11} = n_{22}(1 + r_4) + n_{66} r_4 + n_{24} s_6, \\ a_{12} &= \mu r_2^2 - \eta^2 n_{66} + 2\eta(r_4 + r_2 s_6), a_{13} = 2(\eta n_{66} - r_4 - r_4^2 - r_2 s_6) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Bây giờ ta xét sự lan truyền của sóng mặt trong lớp $x_3 = -h$, truyền với vận tốc c và số sóng k theo hướng x_1 , tắt dần theo hướng x_3 . Chuyển dịch $\bar{u}$, điện thế Φ và ứng suất $\bar{\sigma}_{ij}$ có dạng:

$$\bar{u}_i = \bar{U}(y)_i e^{ik(x_1 - ct)}, \bar{\sigma}_{i3} = k \bar{t}_{i3}(y) e^{ik(x_1 - ct)}, \Phi = ik\phi(y) e^{ik(x_1 - ct)}, y = kx_3, i = 1, 3, \quad (1.12)$$

Thay thế (1.12) vào (1.8) - (1.10) và tính đến tại $x_3 = 0$

$$\begin{aligned} & \mu t_{13}(0) + \varepsilon \{ \mu(\bar{X} - \eta) U_1(0) - \mu r_4 t_{33}(0) \} \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \{ \mu(\eta - a_1 \bar{X}) U_3(0) + (a_2 s_6 - \frac{1}{3} a_8 - a_4 \mu - \mu n_{66} \bar{X} - \frac{2}{3} s_6^2 \bar{X}) t_{13}(0) \} \\ & + \frac{\varepsilon^3}{6} \{ ((a_{10} \mu - \frac{3}{2} a_2 a_7 + a_8 r_4 + a_{11} \mu \bar{X} + \frac{3}{2} a_7 s_6 \bar{X} - r_4 s_6^2 \bar{X}) t_{33}(0) \\ & + (a_{12} \mu - \frac{3}{2} a_2^2 + a_8 \eta - a_8 \bar{X} + a_{13} \mu \bar{X} - \mu n_{66} \bar{X}^2 + 3a_2 s_6 \bar{X} - \eta s_6^2 \bar{X} - \frac{1}{2} s_6^2 \bar{X}^2) U_1(0) \} = 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} & \mu t_{33}(0) + \varepsilon \{ \mu \bar{X} U_3(0) + \mu t_{13}(0) \} \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \{ \mu(a_1 \bar{X} - \eta) U_1(0) + (\frac{1}{3} s_6^2 \bar{X} - \frac{1}{3} a_8 - \mu r_4 - \mu n_{22} \bar{X}) t_{33}(0) \} \\ & + \frac{\varepsilon^3}{6} \left\{ (\mu \eta - a_8 \bar{X} - a_6 \mu \bar{X} - \mu n_{22} \bar{X}^2 + s_6^2 \bar{X}^2) U_3(0) \right. \\ & \left. + (a_2 s_6 - a_8 - a_4 \mu - a_5 \mu \bar{X} + a_3 s_6 \bar{X} + s_6^2 \bar{X}) t_{13}(0) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

với $\varepsilon = kh$. Ở đây $U_k(0)$ và $t_{ij}(0)$ là các biên độ của chuyển dịch và ứng suất của bán không gian tại mặt $x_3 = 0$. Đây là điều kiện biên hiệu dụng xấp xỉ bậc ba. Nó thay thế xấp xỉ toàn bộ ảnh hưởng của lớp đàn điện mỏng không nén được lên bán không gian.

3. PHƯƠNG TRÌNH TÁN SẮC

Xét một bán không gian đàn hồi nén được. Khi đó, các vector chuyển dịch và ứng suất

$U = [u_1 \ u_3]^T$, $T = [\sigma_{12} \ \sigma_{22}]^T$ thỏa mãn các điều kiện biên hiệu dụng (1.13) và (1.14) và điều kiện tắt dần tại $x_3 = +\infty$ như sau:

$$U = T = 0 \quad \text{tại } x_3 = +\infty. \quad (1.15)$$

Mối liên hệ giữa chuyển dịch-ứng suất có dạng sau:

$$\sigma_{22} = c_{12} u_{1,1} + c_{22} u_{2,2}, \quad \sigma_{13} = c_{55} (u_{1,3} + u_{3,1}) \quad (1.16)$$

Xét sóng Rayleigh truyền trong một bán không gian trục hướng nén được với vận tốc c (> 0), số

sóng k theo hướng x_1 và tắt dần theo hướng x_3 .
Theo (Odgen and Vinh, 2004), các thành phần chuyển dịch có dạng:

$$u_1 = U_1(y)e^{ik(x_1-ct)}; \quad u_3 = U_3(y)e^{ik(x_1-ct)}; \quad (1.17)$$

trong đó

$$U_1 = B_1 e^{-b_1 y} + B_2 e^{-b_2 y}; \quad U_3 = \alpha_1 B_1 e^{-b_1 y} + \alpha_2 B_2 e^{-b_2 y} \quad (1.18)$$

B_1, B_2 là các hằng số xác định, và

$$\alpha_k = \frac{(c_{13} + c_{55})b_k}{(c_{33}b_k^2 - c_{55} + X)} \quad (1.19)$$

b_1, b_2 là hai nghiệm có phần thực dương của

phương trình:

$$b^4 - Sb^2 + P = 0 \quad (1.20)$$

Đã được chỉ ra rằng nếu sóng Rayleigh tồn tại, thì

$$0 < X < \min\{c_{66}, c_{11}\}; \quad X = \rho c^2 \quad (1.21)$$

và $P > 0, S + P > 0, b_1 b_2 = \sqrt{P}, b_1 + b_2 = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$

$$(1.22)$$

Thay (1.17) vào (1.16) dẫn đến:

$$\sigma_{13} = kt_{13}(y)e^{ik(x_1-ct)}; \quad \sigma_{33} = ikt_{33}(y)e^{ik(x_1-ct)}; \quad y = kx_3 \quad (1.23)$$

trong đó

$$t_{13}(0) = \beta_1 B_1 e^{-b_1 y} + \beta_2 B_2 e^{-b_2 y}; \quad t_{33}(0) = \gamma_1 B_1 e^{-b_1 y} + \gamma_2 B_2 e^{-b_2 y} \quad (1.24)$$

$$\beta_k = -c_{55}(b_k + \alpha_k); \quad \gamma_k = c_{13} - c_{33}b_k \alpha_k, \quad k = 1, 2.$$

Với $x_3 = 0$, phương trình (1.18) và (1.24) có dạng:

$$U_1(0) = B_1 + B_2; \quad U_2(0) = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2; \quad t_{13}(0) = \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2; \quad t_{33}(0) = \gamma_1 B_1 + \gamma_2 B_2. \quad (1.25)$$

Thay (1.25) vào (1.13) và (1.14), ta có:

$$f_1 B_1 + f_2 B_2 = 0, \quad f_3 B_1 + f_4 B_2 = 0 \quad (1.26)$$

trong đó

$$f_1 = \mu\beta_1 + \mu\varepsilon(\bar{X} - \eta - r_4\gamma_1) + \frac{\varepsilon^2}{2}(\mu(\eta - a_1\bar{X})\alpha_1 + (a_2s_6 - a_4\mu - \frac{1}{3}a_8 - \mu n_{66}\bar{X} - \frac{2}{3}s_6^2\bar{X})\beta_1) \\ + \frac{\varepsilon^3}{6} \left\{ a_{12}\mu + a_8\eta - \frac{3}{2}a_2^2 - a_8\bar{X} + a_{13}\mu\bar{X} - \eta s_6^2\bar{X} + 3a_2s_6\bar{X} - \mu n_{66}\bar{X}^2 - \frac{1}{2}s_6^2\bar{X}^2 \right\}; \\ + \frac{\varepsilon^3}{6} \left\{ (a_{10}\mu + a_8r_4 - \frac{3}{2}a_2a_7 + a_{11}\mu\bar{X} + \frac{3}{2}a_7s_6\bar{X} - r_4s_6^2\bar{X})\gamma_1 \right\};$$

$$f_2 = \mu\beta_2 + \mu\varepsilon(\bar{X} - \eta - r_4\gamma_2) + \frac{\varepsilon^2}{2}(\mu(\eta - a_1\bar{X})\alpha_2 + (a_2s_6 - a_4\mu - \frac{1}{3}a_8 - \mu n_{66}\bar{X} - \frac{2}{3}s_6^2\bar{X})\beta_2) \\ + \frac{\varepsilon^3}{6} \left\{ a_{12}\mu + a_8\eta - \frac{3}{2}a_2^2 - a_8\bar{X} + a_{13}\mu\bar{X} - \eta s_6^2\bar{X} + 3a_2s_6\bar{X} - \mu n_{66}\bar{X}^2 - \frac{1}{2}s_6^2\bar{X}^2 \right\}; \\ + \frac{\varepsilon^3}{6} \left\{ (a_{10}\mu + a_8r_4 - \frac{3}{2}a_2a_7 + a_{11}\mu\bar{X} + \frac{3}{2}a_7s_6\bar{X} - r_4s_6^2\bar{X})\gamma_2 \right\}; \quad (1.27)$$

$$f_3 = \mu\gamma_1 + \mu\varepsilon(\bar{X}\alpha_1 + \beta_1) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ \mu(a_1\bar{X} - \eta) + (\frac{1}{3}s_6^2\bar{X} - \mu n_{22}\bar{X} - \mu r_4 - \frac{1}{3}a_8)\gamma_1 \right\} \\ + \frac{\varepsilon^3}{6} \left\{ (\mu\eta - a_8\bar{X} - a_6\mu\bar{X} - \mu n_{22}\bar{X}^2 + s_6^2\bar{X}^2)\alpha_1 + (a_2s_6 - a_8 - a_4\mu - a_5\mu\bar{X} + a_3s_6\bar{X} + s_6^2\bar{X})\beta_1 \right\};$$

$$f_4 = \mu\gamma_2 + \mu\varepsilon(\bar{X}\alpha_2 + \beta_2) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ \mu(a_1\bar{X} - \eta) + (\frac{1}{3}s_6^2\bar{X} - \mu n_{22}\bar{X} - \mu r_4 - \frac{1}{3}a_8)\gamma_2 \right\} \\ + \frac{\varepsilon^3}{6} \left\{ (\mu\eta - a_8\bar{X} - a_6\mu\bar{X} - \mu n_{22}\bar{X}^2 + s_6^2\bar{X}^2)\alpha_2 + (a_2s_6 - a_8 - a_4\mu - a_5\mu\bar{X} + a_3s_6\bar{X} + s_6^2\bar{X})\beta_2 \right\} \quad (1.28)$$

Do $B_1^2 + B_2^2 \neq 0$, dẫn đến định thức ma trận hệ số của hệ thuần nhất (1.26) phải bằng 0, ta có:

$$f_1 f_4 - f_2 f_3 = 0 \quad (1.29)$$

Thay thế (1.27) - (1.28), ta có:

$$A_0 + A_1 \varepsilon + A_2 \frac{\varepsilon^2}{2} + A_3 \frac{\varepsilon^3}{6} + O(\varepsilon^4) = 0 \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} A_0 &= \mu^2 [\gamma, \beta], \quad A_1 = (\mu^2 \bar{X} [\alpha, \beta] + \mu^2 (\bar{X} - \eta) [\gamma]) \\ A_2 &= 2\mu^2 \bar{X} (\bar{X} - \eta) [\alpha] - \eta \mu^2 [\beta] - \eta \mu^2 [\alpha, \gamma] \\ &\quad + (\mu^2 - \frac{2}{3} a_5 \mu - a_2 \mu^2 - \mu^2 n_{66} \bar{X} + a_1 \mu s_6 - \frac{1}{3} \mu s_6^2 \bar{X}) [\gamma, \beta] \\ A_3 &= \left\{ \begin{aligned} &a_3 \mu^2 - \frac{3}{2} a_1^2 \mu + 2a_5 \mu \eta - 2a_5 \mu \bar{X} + 3\mu^2 \bar{X} \\ &+ a_4 \mu^2 \bar{X} - \mu^2 n_{66} \bar{X}^2 + 3a_1 \mu s_6 \bar{X} - 2\mu \eta s_6^2 \bar{X} + \frac{1}{2} \mu s_6^2 \bar{X}^2 \end{aligned} \right\} [\gamma] \\ &\quad + \left\{ \begin{aligned} &3\mu^2 \bar{X} - 2\mu^2 \eta - 2a_5 \mu \bar{X} - 3a_2 \mu^2 \bar{X} - 3\mu^2 n_{66} \bar{X}^2 + 3a_1 \mu s_6 \bar{X} - \mu s_6^2 \bar{X}^2 \end{aligned} \right\} [\alpha, \beta] \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} [\alpha] &= X - c_{11} - c_{55} \sqrt{P}, \quad [\beta] = [\alpha; \gamma] = c_{55} (c_{11} - X - c_{13} \sqrt{P}); \quad [\gamma] = c_{33} c_{55} \sqrt{P} \sqrt{S + 2\sqrt{P}}, \\ [\alpha; \beta] &= c_{55} (c_{11} - X) \sqrt{S + 2\sqrt{P}}, \quad [\gamma; \beta] = c_{55} [(c_{13}^2 - c_{33} (c_{11} - X)) \sqrt{P} + X (c_{11} - X)], \\ S &= \frac{c_{33} (c_{11} - X) + c_{55} (c_{55} - X) - (c_{13} + c_{55})^2}{c_{33} c_{55}}, \quad P = \frac{(c_{11} - X) (c_{55} - X)}{c_{33} c_{55}} \end{aligned} \quad (1.32)$$

Phương trình (1.30) là phương trình tán sắc xấp xỉ bậc ba hoàn toàn tường minh. Ở dạng không thứ nguyên phương trình (1.30) được viết như sau:

$$D_0 + \varepsilon D_1 + \frac{\varepsilon^2}{2} D_2 + \frac{\varepsilon^3}{6} D_3 + O(\varepsilon^4) = 0 \quad (1.33)$$

ở đây $D_0 = \mu^* [\gamma, \beta]^*$; $D_1 = \mu^* (r_v^2 x [\alpha, \beta]^* + (r_v^2 x - \eta^*) [\gamma]^*)$

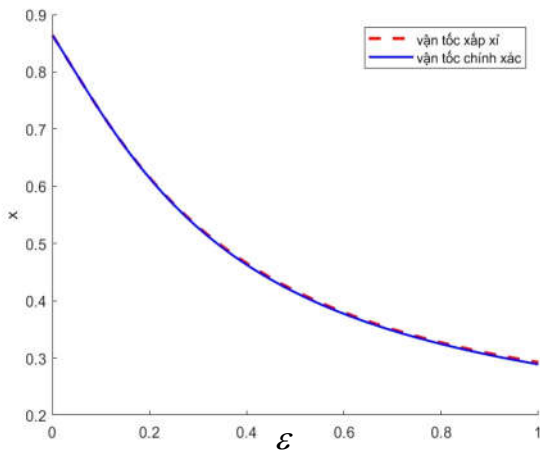
$$\begin{aligned} D_2 &= (2\mu^* r_v^2 x (r_v^2 x - \eta^*) [\alpha]^* + 2\mu^* ((1 - r_4^*) r_v^2 x - \eta^*) [\beta]^* \\ &\quad + (a_2^* s_6^* - \frac{2}{3} a_8^* + \mu^* (r_4^* - a_4^*) - (\mu^* (n_{22}^* + 1) + \frac{1}{3} (s_6^*)^2) r_v^2 x) [\gamma, \beta]^*) \\ D_3 &= \left\{ \begin{aligned} &a_{12}^* \mu^* - \frac{3}{2} (a_2^*)^2 + 2a_8^* \eta^* + [3a_2^* s_6^* - 2\eta^* (s_6^*)^2 - 2a_8^*] \\ &+ \mu^* (a_{13}^* + 3\eta^* n_{22}^* + 3r_4^* (a_1^* - 1)) r_v^2 x - \mu^* (3n_{22}^* - 1) r_v^4 x^2 \end{aligned} \right\} [\gamma]^* \\ &\quad + \left\{ \begin{aligned} &-2\mu^* \eta^* + ((3a_1^* - 3a_4^* - a_6^*) \mu^* - 2a_8^* + 3a_2^* s_6^*) r_v^2 x \\ &- (\mu^* (n_{22}^* + 3) + (s_6^*)^2) r_v^4 x^2 \end{aligned} \right\} [\alpha, \beta]^* \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$x = \frac{X}{c_{55}}; e_1 = \frac{c_{11}}{c_{55}}; e_2 = \frac{c_{33}}{c_{55}}; e_3 = \frac{c_{13}}{c_{55}}; c_{11}^* = \frac{\bar{c}_{11}}{\bar{c}_{55}}; c_{13}^* = \frac{\bar{c}_{13}}{\bar{c}_{55}}; c_{33}^* = \frac{\bar{c}_{33}}{\bar{c}_{55}}; e_{11}^* = \frac{\bar{e}_{11}}{\bar{e}_{33}}; e_{15}^* = \frac{e_{15}}{\sqrt{\bar{e}_{33} \bar{c}_{55}}};$$

với

$$e_{31}^* = \frac{e_{31}}{\sqrt{\bar{e}_{33} \bar{c}_{55}}}; e_{33}^* = \frac{e_{33}}{\sqrt{\bar{e}_{33} \bar{c}_{55}}}; r_\mu = \frac{\bar{c}_{55}}{c_{55}}; r_v = \frac{c_2}{\bar{c}_2}; c_2 = \sqrt{\frac{c_{55}}{\rho}}; \bar{c}_2 = \sqrt{\frac{\bar{c}_{55}}{\bar{\rho}}}; s_6^* = e_{15}^*; r_4^* = \frac{c_{13}^* + e_{31}^* e_{33}^*}{c_{33}^* + (e_{33}^*)^2};$$

$$\begin{aligned}
r_2^* &= \frac{c_{13}^* e_{33}^* - c_{33}^* e_{31}^*}{c_{33}^* + (e_{33}^*)^2}; n_{22}^* = \frac{1}{c_{33}^* + (e_{33}^*)^2}; n_{24}^* = \frac{e_{33}^*}{c_{33}^* + (e_{33}^*)^2}; n_{44}^* = \frac{-c_{33}^*}{c_{33}^* + (e_{33}^*)^2}; \\
\eta^* &= c_{11}^* - \frac{c_{13}^* (c_{13}^* + 2e_{31}^* e_{33}^*) - c_{33}^* (e_{31}^*)^2}{c_{33}^* + (e_{33}^*)^2}; \mu^* = -(\epsilon_{11}^* + (e_{15}^*)^2); a_1^* = 1 + r_4^*; a_2^* = \mu^* r_2^* + \eta^* s_6^*; \\
a_4^* &= r_4^* + r_2^* s_6^* - \eta^*; a_6^* = 1 + 2r_4^*; a_8^* = 2\mu^* r_2^* s_6^* + \eta^* (s_6^*)^2 - (\mu^*)^2 n_{44}^*; \\
a_{12}^* &= \mu^* (r_2^*)^2 - (\eta^*)^2 + 2\eta^* r_4^* + 2\eta^* r_2^* s_6^*; a_{13}^* = 2\eta^* - 2r_4^* - (r_4^*)^2 - 2r_2^* s_6^*. \\
[\alpha]^* &= x - e_1 - \sqrt{P^*}; [\beta]^* = \frac{1}{r_\mu} (e_1 - x - e_3 \sqrt{P^*}); [\gamma]^* = \frac{1}{r_\mu} e_3 \sqrt{P^*} \sqrt{S^* + 2\sqrt{P^*}}; \\
[\alpha, \beta]^* &= \frac{1}{r_\mu} (e_1 - x) \sqrt{S^* + 2\sqrt{P^*}}; [\gamma, \beta]^* = \frac{1}{r_\mu^2} [(e_3^2 - e_2 (e_1 - x)) \sqrt{P^*} + x(e_1 - x)] \\
S^* &= \frac{e_2 (e_1 - x) + 1 - x - (e_3 + 1)^2}{e_2}, P^* = \frac{(e_1 - x)(1 - x)}{e_2}
\end{aligned} \tag{1.35}$$



Hình 1. Đường cong vận tốc xấp xỉ (đường nét đứt) được tìm từ phương trình (1.33) và đường cong vận tốc chính xác (đường nét liền)

Hình 1 biểu diễn vận tốc xấp xỉ tìm được từ phương trình (1.33) và phương trình vận tốc chính xác với số liệu:

$e_1 = 3.5; e_2 = 2.8; e_3 = 1; e_1^* = 2.5; e_3^* = 1.5; e_2^* = 3.2;$
 $e_{15}^* = 0.2, e_{31}^* = 1, e_{33}^* = 0.5,$
 $\epsilon_{11} = 0.01, r_\mu = 0.5, r_v = 2.8.$ Từ hình vẽ cho chúng ta thấy đường cong vận tốc chính xác và đường cong vận tốc xấp xỉ bám khá sát nhau. Điều này chỉ ra đường cong vận tốc xấp xỉ tìm được từ phương trình (1.33) là rất tốt và có độ chính xác cao. Vì vậy phương trình tán sắc xấp xỉ bậc ba (1.33) thu được thực sự tốt và là công cụ rất thuận tiện trong ứng dụng thực tiễn.

4. KẾT LUẬN

Bài báo nghiên cứu sóng Rayleigh truyền trong bán không gian đàn hồi trục hướng phủ bởi một lớp mỏng đàn điện. Bài báo đã thu được 2 điều kiện biên cho lớp đàn điện. Từ 2 điều kiện biên này, tác giả đã tìm được phương trình tán sắc xấp xỉ bậc 3 cho sóng Rayleigh. Đây là các kết quả mới, có ý nghĩa khoa học và hữu ích cho các nhà khoa học nghiên cứu các bài toán truyền sóng cho môi trường đàn điện từ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Adams, S. D. M., Craster, R. V. and Williams, D. P. (2007), "Rayleigh waves guided by topography", Proc. R. Soc., A 463, pp. 531-550.
- Bernard Collet and Michel Destrade (2005), "Explicit secular equations for piezoacoustic surface waves: Rayleigh modes", Journal of Applied Physics **98**, 054903.

- Rayleigh, L. (1885), *"On waves propagating along the plane surface of an elastic solid"*, Proc. R. Soc. Lond. **A17**, pp. 4-11.
- Pham Chi Vinh and Nguyen Thi Khanh Linh (2013), *"Rayleigh waves in an incompressible elastic half-space overlaid with a water layer under the effect of gravity"*, *Meccanica*, Vol. 48, pp.2051 – 2060.
- Pham Chi Vinh, Vu Thi Ngoc Anh, Nguyen Thi Khanh Linh (2016), *"Exact secular equations of Rayleigh waves in an orthotropic elastic half-space overlaid by an orthotropic elastic layer"*, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 83, pp. 65–72.
- P. C. Vinh, N. T. K. Linh, V. T. N. Anh (2014), *"Rayleigh waves in an incompressible orthotropic half-space coated by a thin elastic layer"*, *Arch. Mech.*, **66**, 173-184.
- Pham Chi Vinh, R. W. Ogden (2004), *"Formulas for the Rayleigh wave speed in orthotropic elastic solids"*, *Arch. Mech.*, 56, 3, pp. 247–265, Warszawa.

Abstract:

THE APPROXIMATE SECULAR OF THE RAYLEIGH WAVE PROPAGATING IN AN ORTHOTROPIC ELASTIC HALF-SPACE COATED WITH A THIN PIEZOELECTRIC LAYER

This paper investigates the propagating of the Raleigh wave in an orthotropic elastic half-space coated with a thin elastic layer. The layer and the half-space are in welded contact with each other with supposing the layer is piezoelectric and the half-space may be compressible. The main aim of the paper is to give explicit secular equations of the Rayleigh wave traveling in the materials. By applying the effective boundary method, approximate secular equations of third-order in terms of the dimensionless were obtained. It is shown that these approximate secular equations have high accuracy and will be useful in practical application.

Keywords: Rayleigh wave, compressible orthotropic elastic half-space, thin piezoelectric layer, approximate secular.

Ngày nhận bài: 07/3/2022

Ngày chấp nhận đăng: 15/4/2022