

SỬ DỤNG CÁC TÍNH CHẤT CỦA HÀM BETA ĐỂ TÍNH MỘT SỐ TÍCH PHÂN SUY RỘNG

ThS. Trần Thị Thùy Dung*

Khoa Khoa học cơ bản, Trường Đại học Công nghiệp Quảng Ninh

*Email: thuydung294@gmail.com

Mobile: 0975 179 741

Tóm tắt

Từ khóa:

Biến đổi; Hàm Beta; Tính chất; Tích phân

Tích phân suy rộng

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

gọi là tích phân Ole loại I. Người ta chứng minh được rằng tích phân này hội tụ với mọi $x > 0, y > 0$. Khi đó $B(x, y)$ được gọi là hàm Beta. Hàm Beta có rất nhiều tính chất quan trọng như tính đối xứng và đặc biệt là mối quan hệ chặt chẽ với hàm Gamma. Sử dụng hàm Beta cùng với các tính chất của nó giúp ta giải quyết dễ dàng một số bài toán tích phân suy rộng khó.

1. GIỚI THIỆU

Hàm Beta là một hàm đặc biệt, còn gọi là tích phân Euler của loại đầu tiên. Nó đóng vai trò quan trọng trong giải tích vì nó có mối quan hệ chặt chẽ với hàm Gamma, bản thân hàm này hoạt động như sự tổng quát hóa của hàm giai thừa. Trong giải tích nhiều hàm tích phân phức tạp được rút gọn thành các tích phân bình thường liên quan đến hàm Beta.

Tích phân suy rộng là một phần kiến thức khó trong học phần toán cao cấp 1 đối với các em sinh viên trường Đại học Công nghiệp Quảng Ninh. Vì vậy, trong bài báo này tôi muốn trình bày lại về hàm Beta, các tính chất của nó và một vài ví dụ sử dụng tính chất của hàm Beta để tính tích phân suy rộng. Qua đó, các em sinh viên có thêm một cách làm với một số bài toán tích phân suy rộng hay và khó.

2. NỘI DUNG

2.1. Định nghĩa. [1]

Hàm Beta $B(m, n)$

Với m, n là các số thực dương thì hàm $B(m, n)$ được xác định như sau

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

2.2. Tính chất

Tính chất 1. [2] Tính chất đối xứng

$$B(m, n) = B(n, m)$$

Chứng minh

Đặt $1-x = y \Rightarrow dy = -dx$. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} B(m, n) &= \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx \\ &= - \int_1^0 (1-y)^{m-1} y^{n-1} dy \\ &= \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{m-1} dx = B(n, m) \end{aligned}$$

Tính chất 2. [2]

$$B(m, n) = \int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{(x+1)^{m+n}} dx$$

Chứng minh

Trước hết ta đặt

$$x = \frac{y}{1-y} \Rightarrow dx = d\left(\frac{y}{1-y}\right) = \left(\frac{1}{1-y}\right)^2 dy$$

Ta có

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{(x+1)^{m+n}} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{y}{1-y}\right)^{m-1} \left(1 + \frac{y}{1-y}\right)^{-(m+n)} \left(\frac{1}{1-y}\right)^2 dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{y}{1-y}\right)^{m-1} \left(\frac{1}{1-y}\right)^{-(m+n)} \left(\frac{1}{1-y}\right)^2 dy \\ &= \int_0^1 y^{m-1} \left(\frac{1}{1-y}\right)^{m-1} \left(\frac{1}{1-y}\right)^{-(m+n)} \left(\frac{1}{1-y}\right)^2 dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 y^{m-1} \left(\frac{1}{1-y} \right)^{-n+1} dy \\
&= \int_0^1 y^{m-1} (1-y)^{n-1} dy = B(m, n)
\end{aligned}$$

Vậy $B(m, n) = \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(x+1)^{m+n}} dx$

Tính chất 3. [2]

$$\left(\frac{m}{m+n} \right) B(m, n) = B(m+1, n)$$

Chứng minh

Sử dụng tính chất 1 và các phép biến đổi đại số ta có

$$B(m+1, n) = B(n, m+1) = \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^m dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 (1-x)^m d\left(\frac{x^n}{n}\right) \\
&= \frac{x^n}{n} (1-x)^m \Big|_0^1 + \frac{m}{n} \int_0^1 x^n (1-x)^{m-1} dx \\
&= \frac{m}{n} \int_0^1 x^n (1-x)^{m-1} dx \\
&= \frac{m}{n} \left(\int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{m-1} (1-(1-x)) dx \right) \\
&= \frac{m}{n} \left(\int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{m-1} dx - \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^m dx \right) \\
&= \frac{m}{n} (B(n, m) - B(n, m+1))
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{m}{n}\right) B(n, m+1) = \frac{m}{n} B(n, m)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{m}{m+n}\right) B(m, n) = B(m+1, n)$$

Tính chất 4. [2]

$$B(m, n) = B(m, n+1) + B(m+1, n)$$

Chứng minh

Sử dụng định nghĩa và các phép biến đổi đại số ta có:

$$\begin{aligned}
&B(m, n+1) + B(m+1, n) \\
&= \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^n dx + \int_0^1 x^m (1-x)^{n-1} dx \\
&= \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} (1-x+x) dx \\
&= \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = B(m, n)
\end{aligned}$$

Tính chất 5. [2]

$$B(m, n) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2m-1} (\cos x)^{2n-1} dx$$

Chứng minh

Ta đặt $x = (\sin y)^2 \Rightarrow dx = 2 \sin y \cos y dy$

Ta có

$$\begin{aligned}
B(m, n) &= \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\sin y)^2]^{m-1} [1 - (\sin y)^2]^{n-1} 2 \sin y \cos y dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin y)^{2m-2} (\cos y)^{2n-2} \sin y \cos y dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin y)^{2m-1} (\cos y)^{2n-1} dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2m-1} (\cos x)^{2n-1} dx
\end{aligned}$$

Tính chất 6. [1]

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Chứng minh

Đây là một tính chất có thể nói là quan trọng nhất vì nó có mối liên hệ mật thiết với Hàm Gamma.

Trước hết ta nhắc lại định nghĩa hàm Gamma

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx \quad \text{với } \alpha \text{ là số thực dương} \quad [1]$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\Gamma(m)\Gamma(n) &= \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x} dx \cdot \int_0^\infty y^{n-1} e^{-y} dy \\
&= \int_0^\infty y^{n-1} e^{-y} \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x} dx dy \\
&= \int_0^\infty y^{n-1} e^{-y} \int_0^\infty (yt)^{m-1} e^{-yt} y dt dy \\
&= \int_0^\infty y^{m+n-1} e^{-y} \int_0^\infty t^{m-1} e^{-yt} dt dy \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty y^{m+n-1} t^{m-1} e^{-y(t+1)} dt dy \\
&= \int_0^\infty t^{m-1} \int_0^\infty y^{m+n-1} e^{-y(t+1)} dy dt \\
&= \int_0^\infty t^{m-1} \int_0^\infty \left(\frac{s}{t+1}\right)^{m+n-1} e^{-s} \left(\frac{1}{t+1}\right) ds dt \\
&= \int_0^\infty t^{m-1} (t+1)^{-(m+n)} \int_0^\infty s^{m+n-1} e^{-s} ds dt \\
&= \int_0^\infty t^{m-1} (t+1)^{-(m+n)} \Gamma(m+n) dt \\
&= \Gamma(m+n) \int_0^\infty \frac{t^{m-1}}{(t+1)^{m+n}} dt
\end{aligned}$$

Theo tính chất 2 ta có

$$B(m, n) = \int_0^\infty \frac{t^{m-1}}{(t+1)^{m+n}} dx$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\Gamma(m)\Gamma(n) &= \Gamma(m+n) \int_0^\infty \frac{t^{m-1}}{(t+1)^{m+n}} dt \\
&= \Gamma(m+n) B(m, n) \\
\Rightarrow B(m, n) &= \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}
\end{aligned}$$

2.3. Ví dụ

2.3.1. Ví dụ 1. Tính tích phân $\int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 1} dx$

Giải

Đặt $x = \sqrt{t}$ ta có

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{t+1} dt$$

Theo Tính chất 2 của hàm Beta ta có:

$$\begin{cases} m-1 = \frac{-1}{2} \\ m+n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ n = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Kết hợp với Tính chất 6 của hàm Beta ta được

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{t+1} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(1)} = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi}}{2} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

2.3.2. Ví dụ 2.

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx$$

Giải

Đặt $x = \sqrt{t}$ ta có

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{(t+1)^2} dt$$

Theo Tính chất 2 của hàm Beta ta có:

$$\begin{cases} m-1 = \frac{-1}{2} \\ m+n = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ n = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Kết hợp với Tính chất 6 của hàm Beta ta được

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{(t+1)^2} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma(2)} = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}}{4} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

2.3.3. Ví dụ 3.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin^2 x} dx$$

Giải

Ta viết biểu thức dưới dạng sau

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{3}} x \cdot \cos^0 x dx$$

Theo tính chất 3 của hàm Beta

$$\begin{cases} 2m-1 = \frac{3}{2} \\ 2n-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{5}{4} \\ n = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{3}} x \cdot \cos^0 x dx$$

$$= \frac{1}{2} B\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}$$

3. KẾT QUẢ

Trong bài báo này tôi đã chứng minh lại một cách tường minh 6 tính chất của hàm Beta và sử dụng nó để giải quyết một số bài toán tích phân suy

rộng. Từ đó người đọc có thể ứng dụng hàm Beta cho nhiều bài toán tích phân khác.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Nguyễn Xuân Liêm (2004), *Giải tích*, NXB Giáo dục.
- [2]. VN MATH.COM (16/8/2013), "Kỹ thuật tích phân nâng cao", <http://www.vnmith.com/2013/08/ki-thuat-tinh-tich-phan-nang-cao-phan-4.html>.